Leçon 261 : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

Développements :

Théorème central limite, Limite de variables aléatoires gaussiennes.

Bibliographie :

Bernis, Barbe Ledoux, Foata Fuchs, Candelpergher,

Rapport du jury 2018 :

Les candidats pourront présenter l'utilisation de la fonction caractéristique pour le calcul de lois de sommes de variables aléatoires indépendantes et faire le lien entre la régularité de la fonction caractéristique et l'existence de moments. Le candidat doit être en mesure de calculer la fonction caractéristique des lois usuelles. Les liens entre la fonction caractéristique et la transformée de Fourier sont des attendus du jury. Le jury attend l'énoncé du théorème de Lévy, que les candidats en comprennent la portée, et son utilisation dans la démonstration du théorème central limite. Pour aller plus loin, des applications pertinentes de ces résultats seront les bienvenues. Enfin, la transformée de Laplace pourra être utilisée pour établir des inégalités de grandes déviations.

Rapport du jury 2017 :

Les candidats pourront présenter l'utilisation de la fonction caractéristique pour le calcul de lois de sommes de variables aléatoires indépendantes et faire le lien entre la régularité de la fonction caractéristique et l'existence de moments. Le candidat doit être en mesure de calculer la fonction caractéristique des lois usuelles. Le jury attend l'énoncé du théorème de Lévy, que les candidats en comprennent la portée, et son utilisation dans la démonstration du théorème central limite. Pour aller plus loin, des applications pertinentes de ces résultats seront les bienvenues. Enfin, la transformée de Laplace pourra être utilisée pour établir des inégalités de grandes déviations.

Remarque 1. *:Toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, A, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.*

1 Définition et premières propriétés

1.1 Fonction caractéristique

Définition 2 (Barbe p65). *[Candel p211] Fonction caractéristique comme transformée de Fourier de P_X.*

Remarque 3. *La fonction caractéristique d'un v.a. est la transformée de Fourier de sa loi de probabilité. (composée avec $t \to -t$)*

Remarque 4. *ϕ_X est définie sur $\mathbb{R}^d$.*

Proposition 5 (Candel). *Si X et Y ont même loi alors elles ont même fonction caractéristique.*

Proposition 6. *Riemann Lebesgue. Si X admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue alors $\phi_X(t) \to 0$.*

Contre exemple 7. *Faux pour une va qui n'est pas à densité : Si X suit une loi de Rademacher, $\phi_X(t) = \cos(t)$ ne tend pas vers 0.*

Proposition 8 (FOATA et FUCHS 2003 p164). *[Candel p211] Toutes les propriétés. +Uniforme continuité. $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$.*

Proposition 9 (Candel p237). *Si X et $-X$ ont même loi, alors ϕ_X est réelle.*

Exemple 10 (Foata). *Si X suit $N(0,1)$, alors ϕ_X est paire, car la densité de la loi $N(0,1)$ est qui est paire.*

Remarque 11 (Candel p230). *De façon analogue, on peut écrire les propriétés i) à v) en dimension d. En dimension d, la propriété vi) se réécrit : $\phi_{AX+b} = e^{i<t,b>}\phi_X(A^t t)$, $\forall t, b \in R^d$, $\forall A \in M_d(\mathbb{R})$*

Exemple 12 (Candel p242). *Une v.a. $X = (X_1, .., X_d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un vecteur gaussien si et seulement si sa fonction caractéristique s'écrit $\phi_X(t) = e^{i<t,M>-1/2<t,C.t>}$, où $M = (E[X_1], .., , E[X_d])$et $C = (Cov(X_i, X_j))_{i,j}$.*

Remarque 13 (Candel). *La fonction caractéristique dépend de la loi et non pas de la v.a. autrement dit si X et Y ont la même loi, alors elles ont même fonction caractéristique.*

1.2 Inversion de la fonction caractéristique

Lemme 14 (Candel p222). *[Ouvrard p201] Lemme du théorème d'inversion.*

Théorème 15 (Candel p224). *Théorème d'inversion. La fonction caractéristique caractérise entièrement la loi.*

Proposition 16 (Candel p225). *Formule d'inversion.*

Proposition 17 (Candel p227). *[Ouvrard 2 p203] Formule d'inversion pour une fonction caractéristique intégrable.*

Contre exemple 18 (Candel p228). *Un va qui possède une densité n'a pas nécessairement une fonction caractéristique intégrable sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 19 (Barbe p67). *[Candel p236] Si* X *suit une loi de Laplace de densité* $(1/2)e^{-|x|}$ *alors* $\phi_X(t) = 1/(1+t^2)$. *Par inversion de Fourier, la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy* $C(1)$ *est* $e^{-|t|}$.

Exemple 20 (Barbe p67). *Exemple d'un calcul de fonction caractéristique avec l'inversion de Fourier.*

1.3 Fonctions caractéristiques usuelles

Proposition 21 (Foata p164). *[Barbe p65] Calcul dans le cas où* X *est à densité / discrète.*

Exemple 22 (Foata). *Tableau donnant les fonctions caractéristiques des lois usuelles*

Exemple 23 (Candel p217). $f_X = e^{-x}1_{]0,+\infty[}(x)$, $X = min(X, a)$.

2 Fonctions caractéristiques et moments

Proposition 24 (Ouvrard 2 p209). *[Barbe p68] Caractérisation moments et régularité.*

Remarque 25 (Candel p211). *On obtient un développement limité.*

Contre exemple 26 (Candel p213). *Si* X *est* L^1 *alors* ϕ_X *est dérivable en* 0 *mais la réciproque est fausse.*

Proposition 27 (Ouvrard 2 p214). *Taylor avec reste intégral et développement en séries entières.*

Si X *a un moment d'ordre* n, *alors* $\forall t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (it)^k/k! E[X_k] + (it)^n/((n-1)!) E[X_n. \int_0^1 (1-u)^{n-1} e^{ituX} du]$.

Remarque 28. *On retrouver la fonction caractéristique d'une gaussienne.*

Pour X *suit* $N(0,1)$, ϕ_X *est de classe* C^∞, *et* $\phi'_X(t) = -t\phi_X(t)$. *Ainsi,* $\phi_X(t) = exp(-t^2/2)$.

Application 29 (Barbe p69). *Si* ϕ_X *est analytique dans un voisinage de* 0 *alors la loi de* X *est caractérisée par ses moments.*

Contre exemple 30 (Barbe p70 ex6.2). *Voir leçon classe.*

Théorème 31 (Barbe p70). *Théorème des moments.*

3 Caractérisation de l'indépendance par les fonctions caractéristiques

Proposition 32 (Ouvrard 2 p205). *[Candel p232] Critère d'indépendance.*

Exemple 33 (Candel p244). *Deux vecteurs gaussiens sont indépendants si et seulement si leur covariance est nulle.*

Remarque 34 (Ouvrard p205). *La fonction caractéristique d'une marginale s'obtient très facilement.*

Proposition 35 (Ouvrard 2 p205). *Deuxième critère d'indépendance.*

Exemple 36 (Ouvrard 2 p206). *Exemple avec deux va réelles indépendantes de même loi de Laplace.*

Application 37 (Ouvrard 2 p207). *Fonction caractéristique de la somme.*

Exemple 38 (Barbe p91). *Somme de n lois de Bernoulli, de Poisson, de lois normales.*

Contre exemple 39 (Foata p167). *Soit* X *une variable aléatoire de Cauchy* $C(0,1)$. *Sa fonction caractéristique est donnée par* $\phi_X(t) = e^{-|t|}$. *Le couple* (X, Y), *où* $Y = X$ *fournit l'exemple désiré : en effet,* $\phi_{X+Y}(t) = \phi_{2X}(t) = e^{-2|t|} = \phi_X(t)\phi_Y(t)$.

Corollaire 40 (Foata p167). *Le produit de deux fonctions caractéristiques est une fonction caractéristique.*

Proposition 41 (Foata p167). $\overline{\phi}$, ϕ^2, $Re(\phi)$ *sont des fonctions caractéristiques.*

Proposition 42 (Ouvrard ?). *Si* X *et* Y *sont indépendantes telles que* $X+Y$ *suit une loi gaussienne alors* X *et* Y *sont gaussiennes.*

4 Convergence en loi

4.1 Convergence en loi et fonctions caractéristiques

Définition 43 (Barbe p129). *Convergence en loi avec les fonctions de répartition.*

Proposition 44 (Barbe p129). X_n *converge en loi vers* X *si et seulement si pour toute fonction continue bornée,* $E(f(X_n)) \to E(f(X))$.

Exemple 45 (Bernis). *Pour* X_n *de loi* $N(a_n, \sigma_n^2)$ *avec* $a_n \to a$ *et* $\sigma_n^2 \to \sigma > 0$, *alors* X_n *converge en loi vers* $N(a, \sigma^2)$.

Théorème 46 (Ouvrard 2). *Théorème de Lévy.*

Application 47. *Loi faible des grands nombres* L^1.

Remarque 48. *Théorème de Poisson, convergence d'une suite* X_n *suit* $B(m, p_n)$ *quand* $p_n \to p$ *; idem avec les lois de Poisson.*

4.2 Théorème central limite

Théorème 49 (Bernis)**.** *Théorème central limite.*

Application 50 (Ouvrard 1 p228)**.** *[Bernis] Théorème de Moivre Laplace global.*

Exemple 51 (Ouvrard 1 p230)**.** *Probabilité que le nombre 6 soit entre 1800 et 2100 fois sur 12000 lancers d'un dé équilibré.*

Application 52. *Formule de Stirling.*